

Oberseminar Algebra Magdeburg 2008/2009

Galois-Konjugation Riemannscher Flächen

Patrick Reichert

Gliederung des Vortrags

1. Einleitung
2. Uniformisierung von Riemannschen Flächen
3. Kinderzeichnungen (Dessin d'enfants)
4. Galois-Konjugation von Dessins

Klassische Konzepte der Uniformisierung

Uniformisierung einer mehrwertigen Funktion

$$w = F(z)$$

bedeutete ursprünglich die Darstellung in Parameterform

$$z = z(t)$$

$$w = w(t), \text{ so dass}$$

$$w(t) = F(z(t))$$

mit Hilfe von einwertigen Funktionen $z(t)$ und $w(t)$.

Präzisere Definition von Uniformisierung

Eine Menge

$$A \subset \mathbb{C}^m$$

wird uniformisiert durch ein System

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

von Funktionen, die meromorph (holomorph mit isolierten Polstellen) in einer Region

$$D \subset \mathbb{C}^n$$

sind, falls f eine holomorphe Überlagerung

$$f: D_0 \rightarrow A_0$$

für eine dichte Teilmenge $A_0 \subset A$ ($D_0 \subset D$) mit einer diskreten Faser ist, auf der eine diskrete Gruppe G von D -Automorphismen transitiv operiert (es gibt nur eine Bahn).

Uniformisierung des Kreises (I)

Der Kreis $x^2 + y^2 = 1$ (und die zugehörige komplexe Kurve in \mathbb{C}^2) wird uniformisiert durch die **trigonometrischen** Funktionen

$$x = x(t) = \cos t,$$

$$y = y(t) = \sin t.$$

Der Definitionsbereich dieser Funktionen ist $D_0 = \mathbb{C}$ und die auf $\{x(t), y(t)\}$ operierende Gruppe G ist die Gruppe der Translationen

$$t \rightarrow t + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Uniformisierung des Kreises (II)

Der Kreis $x^2 + y^2 = 1$ wird auch uniformisiert durch die **rationalen** Funktionen

$$x = x(t) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$
$$y = y(t) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Der Definitionsbereich dieser Funktionen ist $D_0 = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ und die auf $\{x(t), y(t)\}$ operierende Gruppe G ist die triviale Gruppe.

Uniformisierung einer kubischen Kurve

Die kubische Kurve

$$w^2 = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$$

kann durch **elliptische** Funktionen uniformisiert werden. Die Uniformisierung erfolgt dann mit Hilfe der Weierstraßschen \wp -Funktion:

$$z = z(t) = \wp(t)$$

$$w = w(t) = \wp'(t)$$

Zusammenhang mit Riemannschen Flächen (I)

- Seit Riemann versuchen Mathematiker, das Uniformisierungs-Problem für allgemeine algebraische Gleichungen

$$P(z, w) = \sum_{i,j} a_{ij} z^i w^j = 0$$

zu lösen, wobei P ein irreduzibles Polynom über \mathbb{C} ist.

- Uniformisierung bedeutet, eine Parameter-Darstellung für Paare (z, w) zu finden, die die Gleichung erfüllen und die sich durch einwertige analytische Funktionen einer komplexen Variable ausdrücken lassen.
- Die Menge der Paare (z, w) , die die Gleichung $P(z, w) = 0$ erfüllen, stellen eine Riemannsche Fläche dar.
- Diese Riemannsche Fläche ist kompakt und eine endlich-blättrig überlagerte Sphäre.

Zusammenhang mit Riemannschen Flächen (II)

- Da es sich herausstellt, dass sich jede kompakte Riemannsche Fläche auf solch eine Weise bilden lässt, muss die **Uniformisierung von Riemannschen Flächen** untersucht werden.

Uniformisierungstheorem von Klein/Poincaré

Jede Riemannsche Fläche R kann in der Form $\Gamma \backslash S$ dargestellt werden, wobei S entweder die Riemannsche Sphäre $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, die komplexe Ebene \mathbb{C} oder die hyperbolische Ebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ ist. Γ ist eine diskrete Gruppe von Möbius-Automorphismen von S .

- $\Gamma \backslash S = \text{Bahnenraum} = \{\Gamma s \mid s \in S\}$
- Möbius-Transformation: $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$
- Γ diskret \Leftrightarrow gegen id konvergente Zahlenfolge ist konstant ab bestimmtem Index

Arten von Riemannschen Flächen (I)

Die Fälle $S = \overline{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} und \mathbb{H} schließen sich gegenseitig aus.

- $S = \overline{\mathbb{C}}$: elliptisch – Dann ist R konform äquivalent zur Sphäre und Γ ist die triviale Gruppe.

- $S = \mathbb{C}$: parabolisch – Dann ist R konform äquivalent zu \mathbb{C} , zu $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ oder zu einem Torus.

Γ ist trivial oder eine Verschiebungsgruppe mit Erzeuger $z \mapsto z + \omega$ ($\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) oder eine freie abelsche Gruppe vom Rang 2 mit Erzeugern $z \mapsto z + \omega_1$ und $z \mapsto z + \omega_2$, wobei $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$.

Arten von Riemannschen Flächen (II)

- $S = \mathbb{H}$: hyperbolisch – R ist äquivalent zum Bahnenraum der oberen komplexen Halbebene \mathbb{H} bzgl. der Operation einer torsions-freien Fuchsschen Gruppe (diskret, keine Elemente endlicher Ordnung)

Verallgemeinertes Uniformisierungstheorem

Für verzweigte Riemannsche Flächen gilt das **Verallgemeinerte Uniformisierungstheorem von Klein/Poincaré**:

Sei R eine Riemannsche Fläche, $\Sigma \subset R$ eine diskrete Menge und $v: R \rightarrow \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$ eine Funktion, die außerhalb von Σ Null ist.

Dann kann R dargestellt werden in der Form $R = \Gamma \backslash S$, wobei $S = \overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ oder \mathbb{H} ist. Γ ist eine diskrete Gruppe von Automorphismen von R und die Überlagerung $S \rightarrow \Gamma \backslash S$ ist verzweigt über R in den Punkten $p \in \Sigma$ und hat dort die Verzweigungsordnungen $v(p)$.

Die Fixpunkte von elliptischen Untergruppen von Γ der Ordnungen $v(p)$ korrespondieren mit den Verzweigungspunkten p .

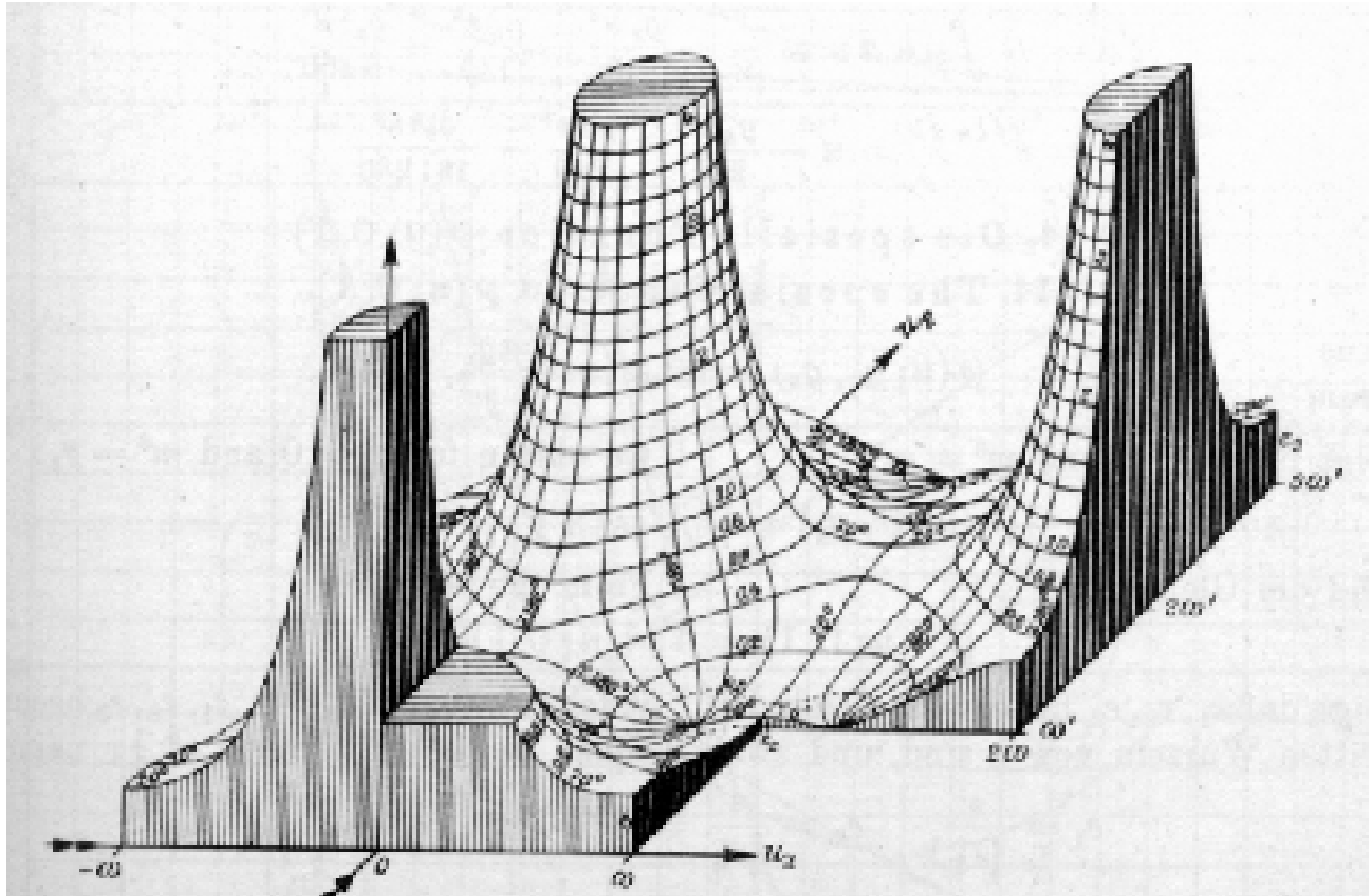
Beispiel: Der Torus als Riemannsche Fläche

- Torus: $X \cong \Omega \backslash \mathbb{C}$ für ein Gitter $\Omega = \{m + n\tau \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ mit Modulus $\tau \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\tau) > 0$.
- Bezogen auf das Gitter Ω wird die Weierstraßsche \wp -Funktion definiert:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

- Die Reihe konvergiert absolut und uniform auf einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \Omega$ und definiert somit eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} , die analytisch in $\mathbb{C} \setminus \Omega$ ist und Pole der Ordnung 2 an den Gitterpunkten besitzt.

Die Weierstraßsche \wp -Funktion (I)



Die Weierstraßsche \wp -Funktion (II)

- \wp ist periodisch bezüglich des Gitters Ω , d.h.

$$\wp(z + \omega) = \wp(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ und } \omega \in \Omega.$$

- Somit ist \wp eine elliptische Funktion bezüglich Ω und erzeugt eine meromorphe Funktion

$$\wp: X = \Omega \setminus \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}.$$

- Die Ableitung

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - \omega)^3}$$

ist auch eine elliptische Funktion bezüglich Ω und besitzt an den Gitterpunkten Pole dritter Ordnung.

Die Weierstraßsche \wp -Funktion (III)

- \wp und \wp' erfüllen die folgende Differentialgleichung:

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

mit den Konstanten

$$g_2 = 60 \cdot \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \omega^{-4}, \quad g_3 = 140 \cdot \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \omega^{-6}.$$

- Das kubische Polynom

$$p(z) = 4z^3 - g_2z - g_3$$

hat stets drei paarweise voneinander verschiedene Nullstellen (d.h. $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$).

Die Weierstraßsche \wp -Funktion (IV)

- Die Punkte

$$t + \Omega \in \Omega \setminus \mathbb{C}$$

können bijektiv den Punkt-Paaren

$$w = \wp'(t)$$

$$z = \wp(t)$$

der elliptischen Kurve $w^2 = p(z)$ zugeordnet werden. Somit kann der Torus $X = \Omega \setminus \mathbb{C}$ mit der Kurve $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = 4z^3 - g_2z - g_3\}$ identifiziert werden.

Erläuterung der Symbolik $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ (I)

- Riemannsche Flächen lassen sich mit Hilfe von Fuchsschen Gruppen Γ beschreiben. (Immanuel Lazarus Fuchs, 1833 – 1902)

- Γ ist eine Untergruppe von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) =$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid ad - bc = 1 \right\} / \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Zwei Matrizen werden also genau dann miteinander identifiziert, wenn sie sich nur durch ihr Vorzeichen voneinander unterscheiden.

Erläuterung der Symbolik $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ (II)

- $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ operiert auf der oberen komplexen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ durch gebrochen-rationale Transformationen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

- Diese Operation ist **treu**. (Aus $g \cdot z = h \cdot z \forall z \in \mathbb{H}$ folgt $g = h$.)
Somit ist $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ isomorph zur Gruppe aller orientierungserhaltenden Isometrien von \mathbb{H} .

Erläuterung der Symbolik $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ (III)

Eine Untergruppe $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ ist eine **Fuchssche Gruppe**, falls

- Γ **diskontinuierlich** auf \mathbb{H} operiert, d.h.

Für jedes $z \in \mathbb{H}$ hat der Orbit $\Gamma z = \{\gamma \cdot z \mid \gamma \in \Gamma\}$ keinen Häufungspunkt in \mathbb{H} .

und falls

- Γ **diskret** ist, d.h.

Für jede gegen die Einheitsmatrix E konvergente Folge gibt es einen Index, ab dem alle Folgenglieder identisch zu E sind.

Erläuterung der Symbolik $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ (IV)

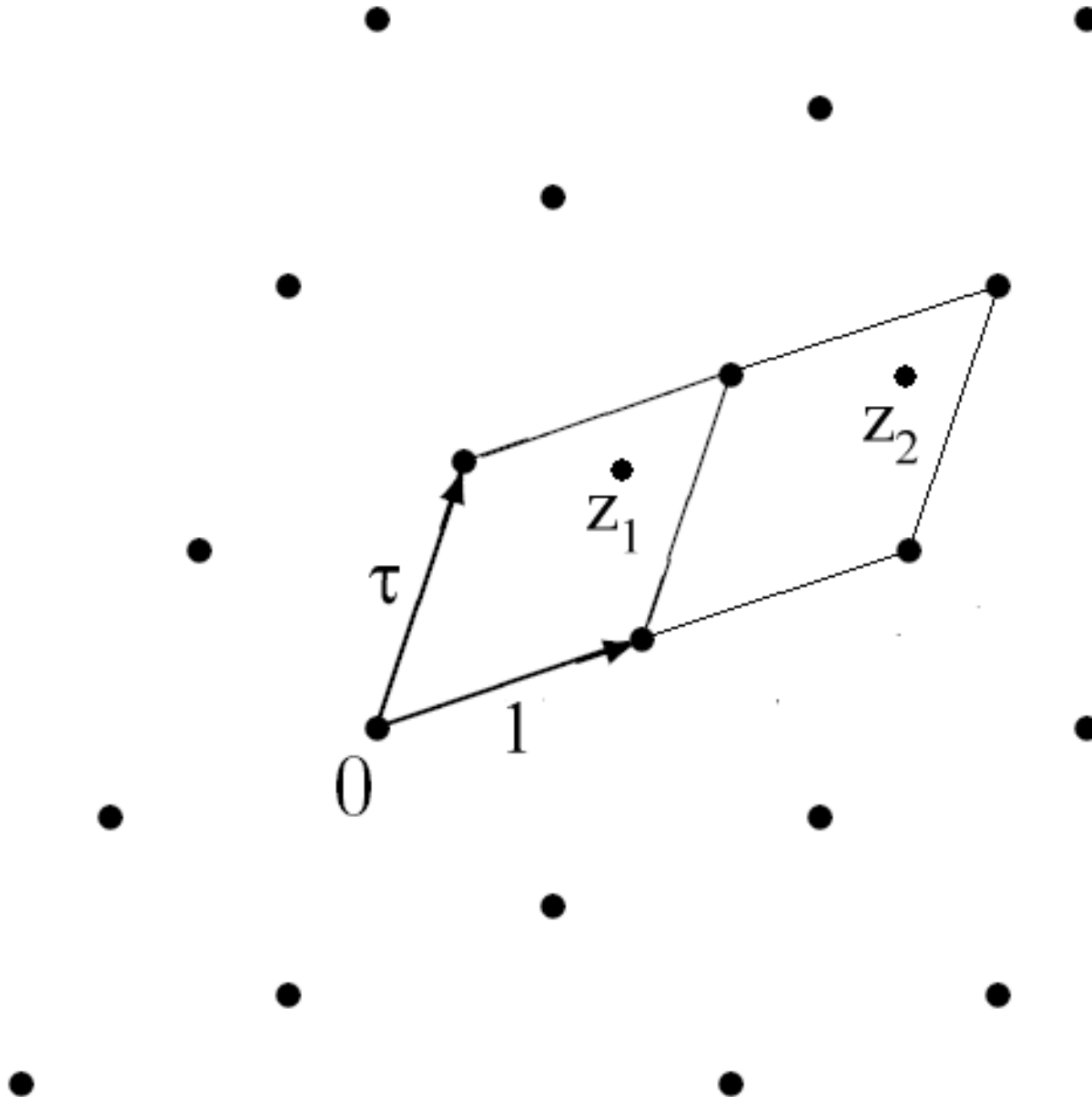
Jede Fuchssche Gruppe Γ operiert auf \mathbb{H} .

\Rightarrow Γ definiert eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{H} :

$$\begin{aligned} z_1 \sim z_2 &\Leftrightarrow \Gamma z_1 = \Gamma z_2 \\ &\Leftrightarrow \{\gamma \cdot z_1 \mid \gamma \in \Gamma\} = \{\gamma \cdot z_2 \mid \gamma \in \Gamma\} \\ &\Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma : z_1 = \gamma \cdot z_2 \end{aligned}$$

Zwei Elemente von \mathbb{H} sind genau dann äquivalent, wenn sie im gleichen Γ -Orbit liegen.

Erläuterung der Symbolik $\Gamma \backslash \mathbb{H} (V)$



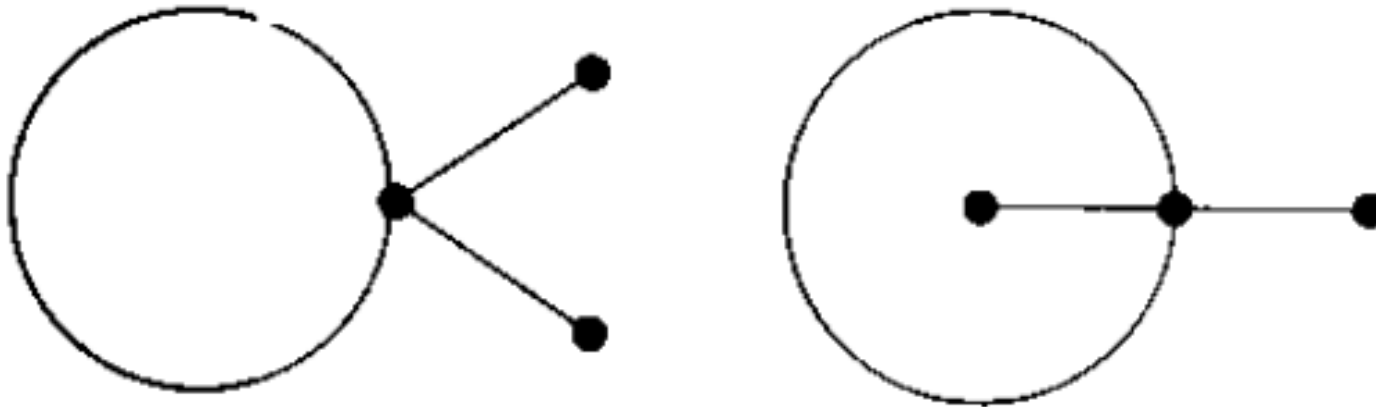
Erläuterung der Symbolik $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ (VI)

Hyperbolische Riemannsche Flächen können dann als Orbitraum einer geeigneten Fuchsschen Gruppe angesehen werden:

$$R = \Gamma \backslash \mathbb{H} = \{\Gamma z \mid z \in \mathbb{H}\} = \mathbb{H} / \sim$$

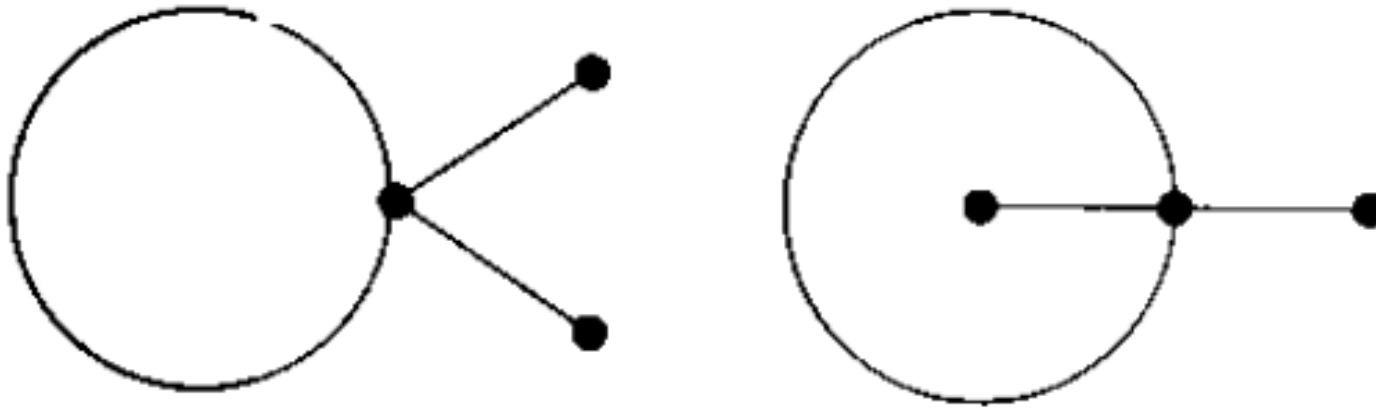
Unterschied zwischen Graphen und Maps (I)

Eine **Map** ist ein Graph mit einer darunterliegenden Struktur. Die beiden Bilder zeigen denselben Graphen, aber es handelt sich um verschiedene Maps.



Kantenmenge, Knotenmenge und Inzidenzrelationen sind gleich, aber verschieden sind die Flächenstücke (*faces*), in die der Graph die Ebene (oder Sphäre) zerlegt.

Unterschied zwischen Graphen und Maps (II)



Links sind die Flächenstücke vom Grad 1 und 5, wobei sie rechts vom Grad 3 und 3 sind.

Kombinatorische Sprechweise: Die Kanten sind unterschiedlich um den Knoten der Ordnung 4 angeordnet.

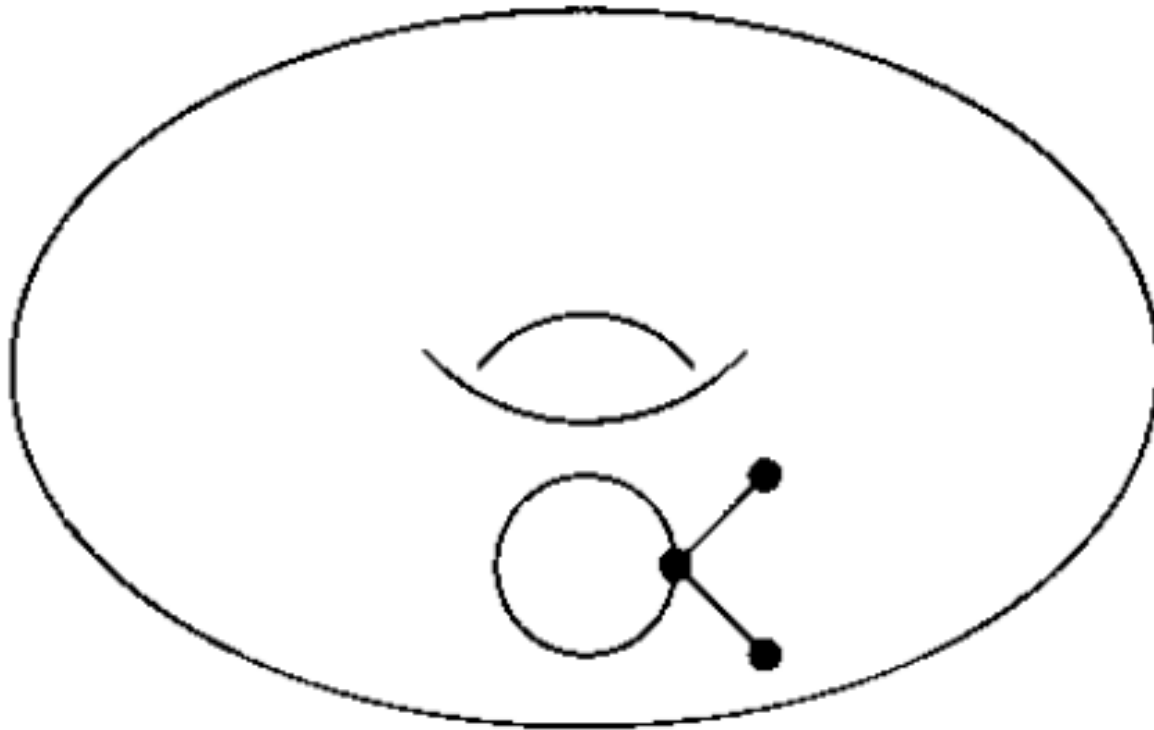
Man beschriftet die Kanten mit Zahlen und benutzt Permutationen, um die Maps zu kodieren.

Definition einer topologischen Map

Eine Map ist ein Graph Γ , der folgendermaßen in eine orientierbare Riemannsche Fläche X eingebettet ist:

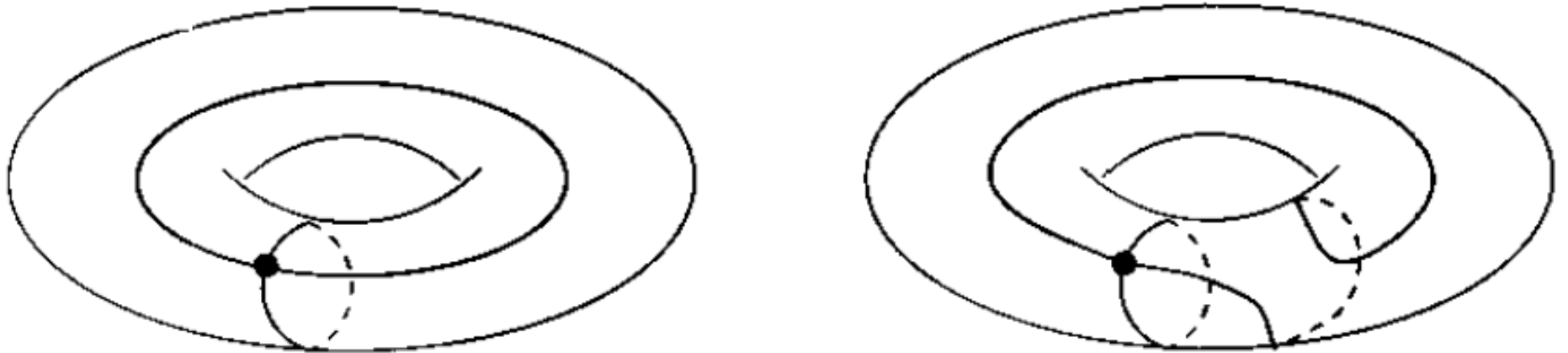
- (1) Die Knoten repräsentieren paarweise voneinander verschiedene Punkte von X .
- (2) Die Kanten repräsentieren Kurven auf X , die sich nur in den Knoten schneiden.
- (3) Wird X entlang der Kanten zerschnitten, so ist die Restmenge $X \setminus \Gamma$ eine disjunkte Vereinigung von zusammenhängenden Komponenten (genannt *faces*), die jeweils homöomorph zu einer offenen Kreisscheibe sind.

Das ist keine Map:



Das äußere Flächenstück ist nicht homöomorph zu einer offenen Kreisscheibe, da es einen Henkel besitzt.

Definition. Zwei Maps $M_1 \subset X_1, M_2 \subset X_2$ sind **isomorph** zueinander, wenn es einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus $u: X_1 \rightarrow X_2$ gibt, so dass die Einschränkung von u auf Γ_1 ein Graphen-Isomorphismus zwischen Γ_1 und Γ_2 ist.



Achtung: Die beiden Maps sind isomorph zueinander, können aber nicht stetig ineinander überführt werden. Sobald das Geschlecht von X größer als 0 ist, gibt es sogenannte **Dehn twists**. Dazu zerschneidet man X entlang einer geschlossenen Kurve auf X , die keine topologische Kreisscheibe umrandet, verdreht einen der entstandenen Ränder um 2π und verklebt die Enden wieder.

Permutationsmodell für Maps (I)

Alle hier betrachteten Riemannschen Flächen sind orientierbar, somit kann man zwischen links und rechts unterscheiden, wenn man eine Kante entlangläuft.

Die Innen- und Außenseiten der Kanten werden durchnummeriert, und für jeden Knoten betrachtet man die zyklische Anordnung der inzidenten Kanten gegen den Uhrzeigersinn.

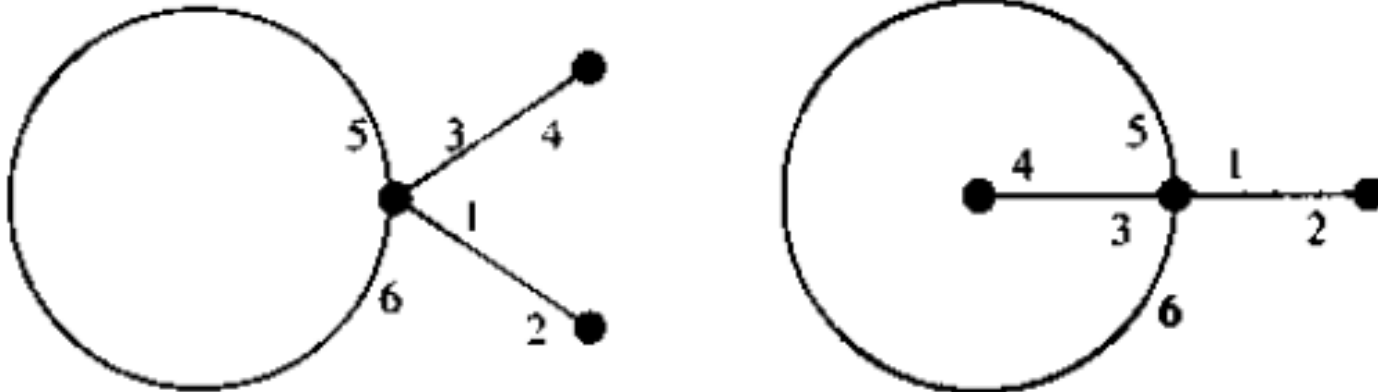


Die Permutation σ ist definiert als das Produkt dieser Permutationen über alle Knoten.

Permutationsmodell für Maps (II)

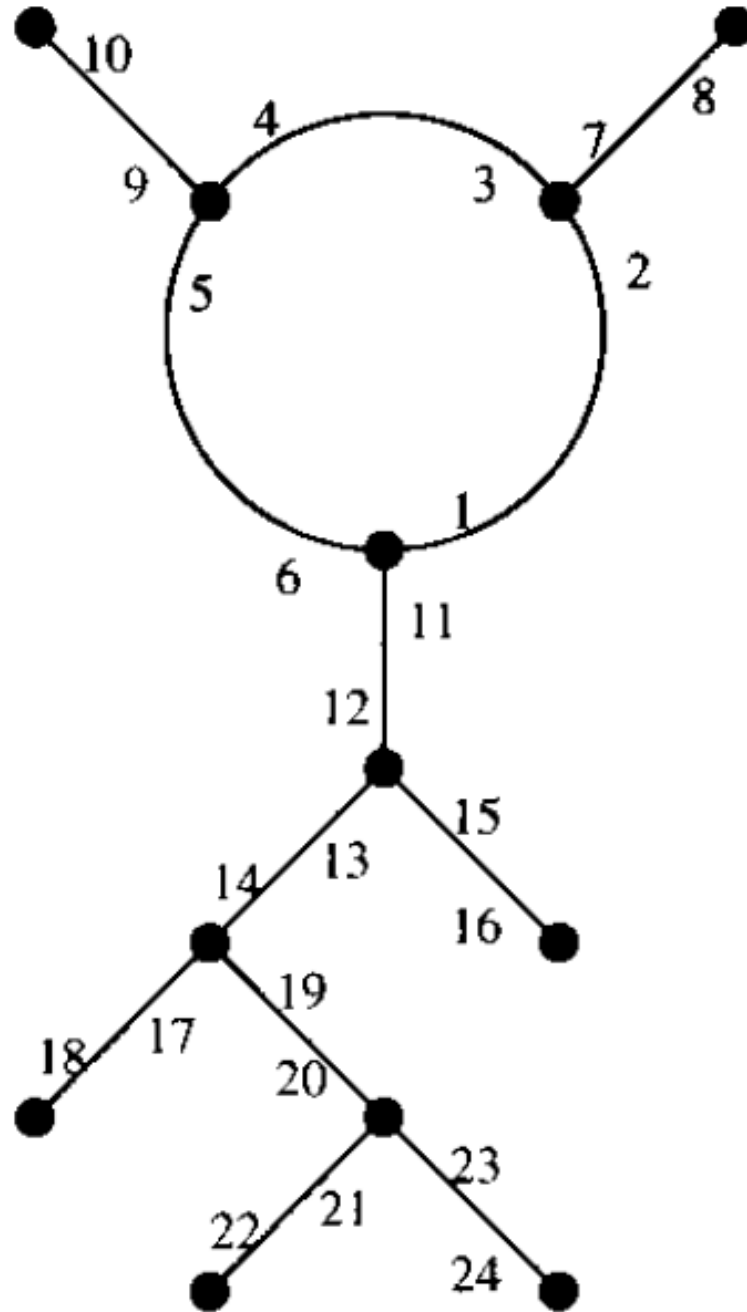
Die Permutation α ist ein Produkt von Transpositionen und beschreibt, welche *Darts* dieselbe Kante bezeichnen.

Ein *Dart* ist ein Teilstück einer Kante, die einen Knoten verläßt. Konvention für die Beschriftung der *Darts*: Durchläuft man eine Kante, so wird ihre Beschriftung immer auf die linke Seite geschrieben.



- links: $\sigma = (1, 3, 5, 6)(2)(4)$, $\alpha = (1, 2)(3, 4)(5, 6)$
- rechts: $\sigma = (1, 5, 3, 6)(2)(4)$, $\alpha = (1, 2)(3, 4)(5, 6)$

Map mit kartographischer Gruppe $\langle \sigma, \alpha \rangle = M_{24}$



Hypermaps als bipartite Maps

Zeichnet man die Knoten einer Map schwarz und fügt in die Mitte jeder Kante einen weißen Knoten ein, erhält man einen **bipartiten** Graphen.



Definition. Eine **Hypermap** ist eine Map, deren Knoten schwarz oder weiß gefärbt sind und jede Kante zwei Knoten unterschiedlicher Farbe verbindet.

Die Permutationen σ und α operieren jetzt auf den Kanten statt auf den Darts, so dass jetzt lediglich die Kanten beschriftet werden. Eine Kante wird links beschriftet, wenn man von schwarz nach weiß läuft.

Der Satz von Belyi

Satz von Belyi (1979). Eine Riemannsche Fläche X besitzt genau dann ein Modell über dem Körper $\overline{\mathbb{Q}}$ der algebraischen Zahlen, wenn es eine Überlagerung

$$f: X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

gibt, welche außerhalb von $\{0, 1, \infty\}$ unverzweigt ist. In diesem Fall kann die meromorphe Funktion f so gewählt werden, dass sie über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert ist.

Definition. Eine meromorphe Funktion $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, die außerhalb von $\{0, 1, \infty\}$ unverzweigt ist, heißt **Belyi-Funktion**. Ein Paar (X, f) heißt **Belyi-Paar**, wenn f eine Belyi-Funktion auf der Riemannschen Fläche X ist.

Kinderzeichnung als Urbild des Intervalls $[0, 1]$

Färbt man im Intervall $[0, 1] \subset \overline{\mathbb{C}}$ den Punkt 0 schwarz und den Punkt 1 weiß, so erhält man die elementare Hypermap:



Ist (X, f) ein Belyi-Paar, so nennt man die Hypermap

$$H = f^{-1}([0, 1]) \subset X$$

Kinderzeichnung auf X (dessin d'enfant, Alexander Grothendieck).

Die schwarzen Knoten von H sind die Urbilder der 0, die weißen die Urbilder der 1.

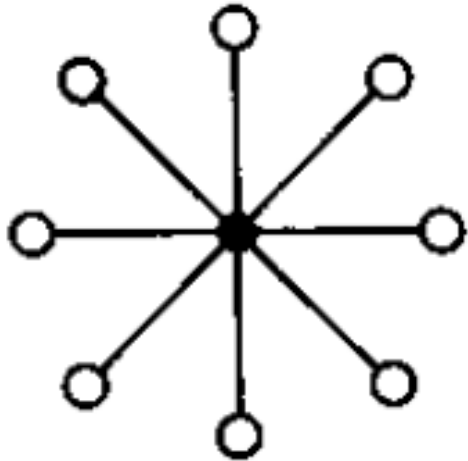
Eigenschaften von Kinderzeichnungen

$$H = f^{-1}([0, 1]) \subset X$$

- Die Knoten-Valenzen sind die Vielfachheiten der zugehörigen kritischen Punkte.
- Knoten der Valenz 1 sind zwar Urbilder der 0 oder 1, aber keine kritischen Punkte.
- Die Kinderzeichnung zerlegt die Riemannsche Fläche in einzelne Flächenstücke (*faces*), wobei jedes Flächenstück in seinem Inneren genau einen Pol besitzt (Urbild von ∞).
- Die Ordnung eines Poles kann man an der Valenz seines Flächenstückes ablesen.
- Außerhalb der Menge der schwarzen und weißen Knoten und der Pole gibt es keine weiteren kritischen Punkte der Funktion f auf X .

Beispiele für Kinderzeichnungen

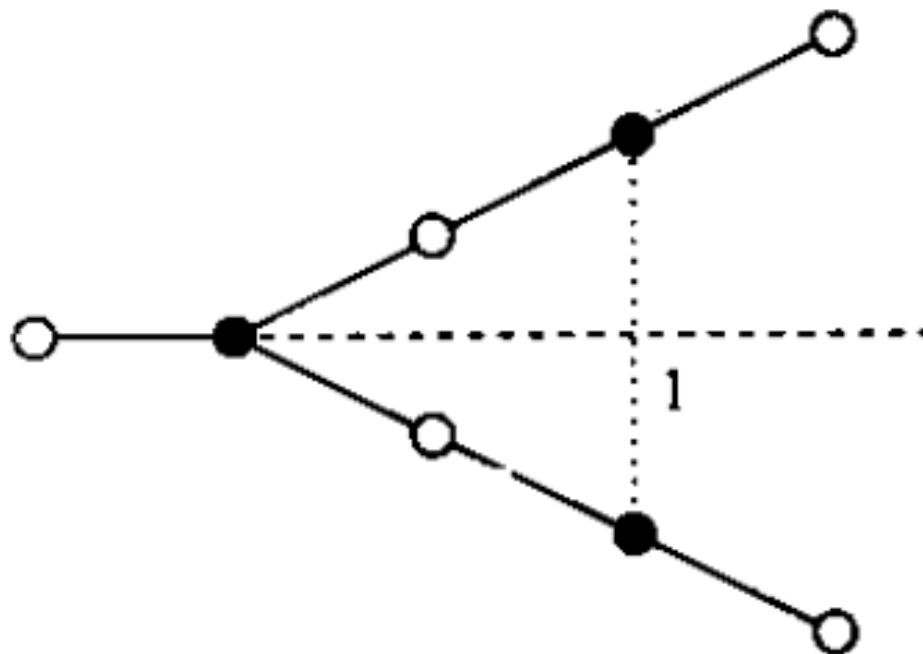
Für $f(x) = x^8$ ist das Urbild des Intervalls $[0, 1]$ ein Stern.



Für das Tschebyscheff-Polynom $f(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$ ist das Urbild des Intervalls $[-1, 1]$ eine Kette.

Galois-Konjugation von Kinderzeichnungen (I)

Man betrachte das folgende Dessin, bei dem der schwarze Knoten der Valenz 3 im Punkt $x = 0$ liegt und der Schnittpunkt der gestrichelten Linien bei $x = 1$ liegt.

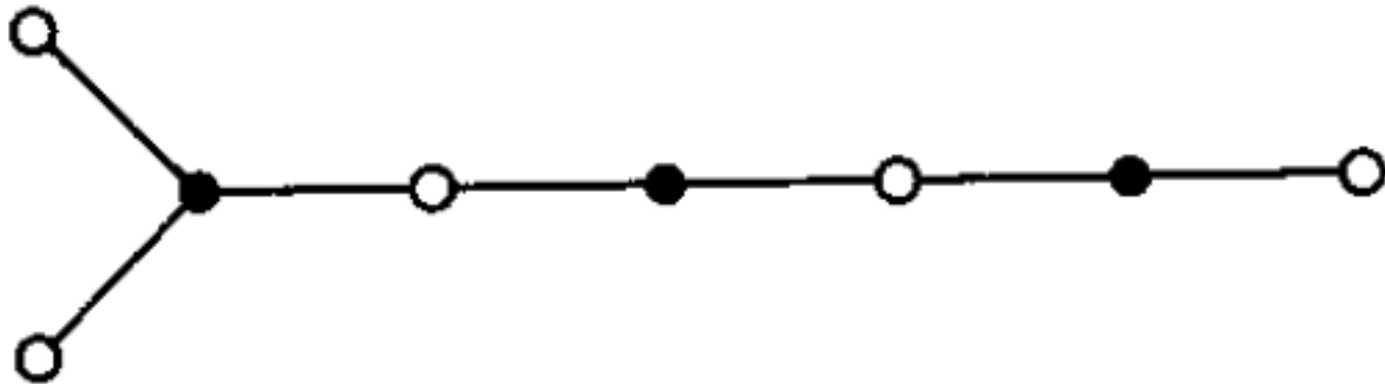


Die zugehörige Belyi-Funktion hat die Gestalt

$$f(x) = x^3 (x^2 - 2x + a)^2 \text{ mit } a = \frac{1}{7} (34 + 6\sqrt{21}).$$

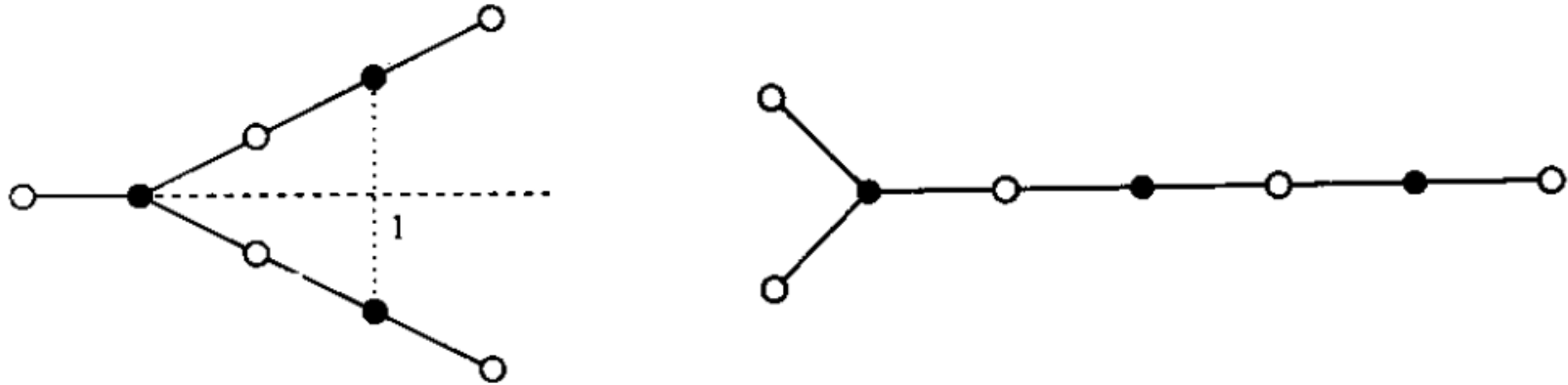
Galois-Konjugation von Kinderzeichnungen (II)

Für das algebraische Konjugierte $a' = \frac{1}{7} (34 - 6\sqrt{21})$ erhält man dagegen diese Kinderzeichnung:



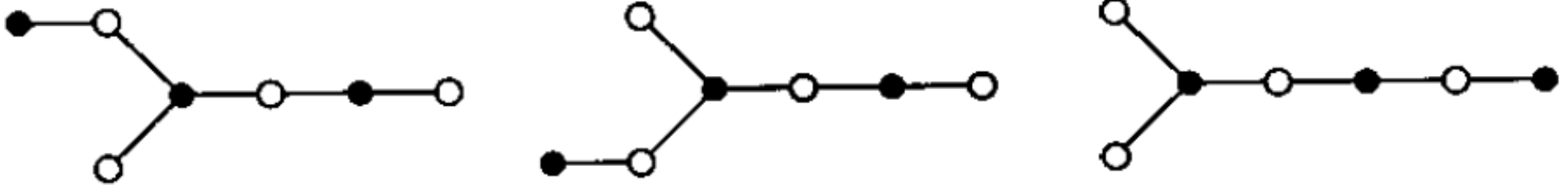
Galois-Konjugation von Kinderzeichnungen (III)

Was verbindet diese beiden Kinderzeichnungen ?



- Die Dessins sind über dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{21})$ definiert.
- Die Dessins werden **konjugiert zueinander** genannt, da die Parameter a und a' algebraisch konjugiert zueinander sind.
- Die Menge dieser beiden Dessins bildet einen Galois-Orbit, d.h. einen Orbit der Operation der universellen Galois-Gruppe $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ auf Kinderzeichnungen.

Ein kubischer Orbit



Hier ist

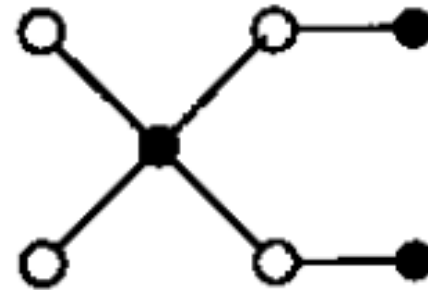
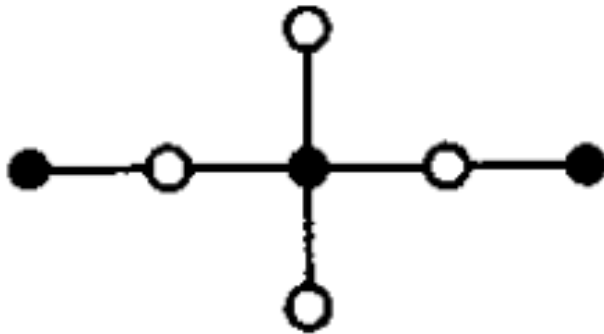
$$f(x) = x^3(x-1)^2(x-a)$$

und a eine Nullstelle der kubischen Gleichung

$$25a^3 - 12a^2 - 24a - 16 = 0.$$

Nicht-konjugierte Kinderzeichnungen

Die folgenden beiden Dessins sind nicht konjugiert bezüglich der universellen Galois-Gruppe $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$:

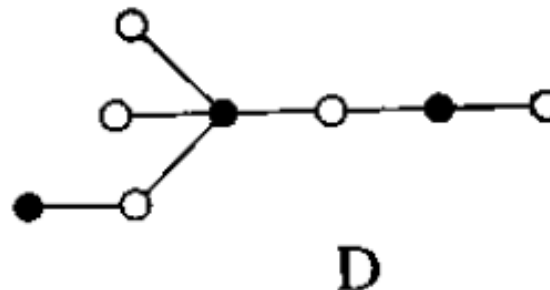
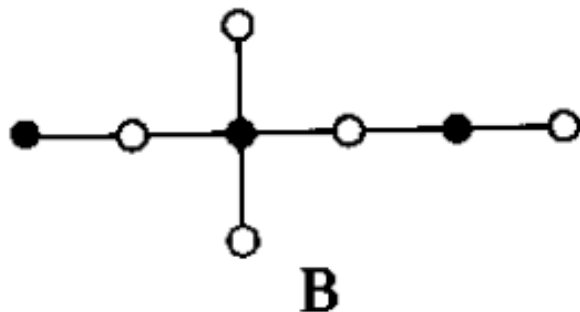
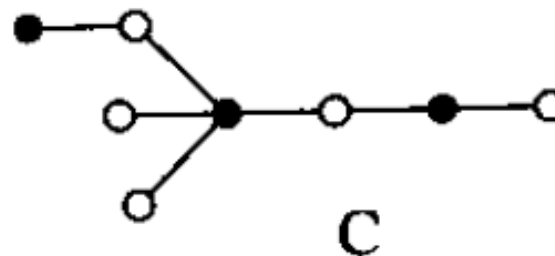
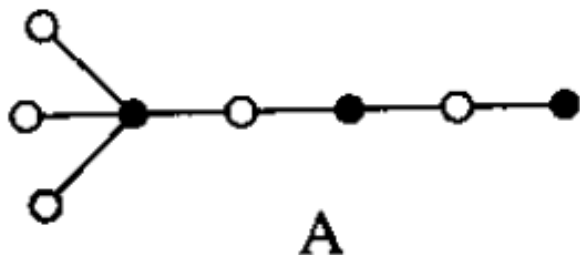


Die Belyi-Funktionen lauten

$$f(x) = x^4(x^2 - 1) \text{ und } f(x) = x^4 \left(x^2 - 2x + \frac{25}{9} \right).$$

Es ist also nicht so, dass alle Bäume von demselben Typ einen Galois-Orbit bilden.

Symmetrie genügt nicht für Konjugation



- A und B bilden einen quadratischen Orbit mit Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{21})$
- C und D bilden einen quadratischen Orbit mit Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$

A und B besitzen kartographische Gruppe A_7 ; C und D besitzen $PSL_3(2)$.

Invarianten von Dessins unter Galois-Operation

Sind f und g zwei Belyi-Polynome, die Galois-konjugiert zueinander sind und D_f, D_g die zugehörigen Dessins, dann gilt immer:

1. D_f und D_g haben gleich viele Kanten (d.h. f und g haben denselben Grad).
2. D_f und D_g haben dieselben Menge der Knoten-Grade (d.h. die ungeordneten Mengen der Vielfachheiten von 0-Urbildern und 1-Urbildern sind gleich).
3. Die kartographischen Gruppen sind permutations-isomorph.

Heutige Form des Belyi-Theorems (Grothendieck, Singerman, Jones, Wolfart)

Für eine Riemannsche Fläche X ist äquivalent:

- (1) X ist definiert über einem algebraischen Zahlkörper (endliche Erweiterung von \mathbb{Q}).
- (2) Es gibt eine Belyi-Funktion $\beta: X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, also eine meromorphe Funktion mit maximal drei kritischen Werten.
- (3) X wird uniformisiert durch eine Untergruppe Γ einer Dreiecksgruppe $\Delta = \Delta(p, q, r) = \langle x, y, z \mid x^p = y^q = z^r = xyz = 1 \rangle$ mit endlichem Index $[\Delta: \Gamma]$. Es gilt also $X \cong \Gamma \backslash \mathbb{H}$ für hyperbolische Riemannsche Flächen.
- (4) Die komplexe Struktur auf X erhält man in kanonischer Weise durch eine Map \mathcal{M} auf X ; das ist ein in X eingebetteter Graph.

Literatur

Das Kapitel über Uniformisierung wurde maßgeblich dem nachfolgenden Buch entnommen:

- [KAG86] S.L. Krushkal, B.N. Apanasov, N.A. Gusevskii, *Kleinian Groups and Uniformization in Examples and Problems*, American Mathematical Society, 1986

Der Graph der Weierstraßschen \wp -Funktion wurde dem folgenden Buch entnommen (Seite 99, Abbildung 55):

- [JE45] E. Jahnke, F. Emde, *Tables of Functions with Formulae and Curves*. Dover Publications, New York, 1945

Der Abschnitt über den Torus als Riemannsche Fläche wurde dem folgenden Buch und der folgenden Doktorarbeit entnommen:

- [JS] G. Jones, D. Singerman, *Complex Function Theory*
- [Bur02] D.S. Burggraf, *Galois actions on dessin d'enfants*, PhD thesis, University of British Columbia, Vancouver, Canada, 2002

Die Einleitung in die Theorie der Kinderzeichnungen und die meisten Bilder wurden dem folgenden Buch entnommen:

- [LZ] S. Lando, A. Zvonkin, *Graphs on Surfaces and Their Applications*

Die Invarianten der Galois-Konjugation wurden teilweise dem folgenden Artikel entnommen:

- [Pil99] K. Pilgrim, *Dessin d'enfants and Hubbard Trees*, Stony Brook IMS 1999/5, arXiv:math/9905170v1

Die heutige Form des Belyi-Theorems wurde dem folgenden Artikel entnommen:

- [JSW07] G.A. Jones, M. Streit, J. Wolfart, *Galois action on families of generalised Fermat curves*, *Journal of Algebra* **307** (2007), 829–840